Adı Soyadı : CEVAP ANAHTARI **24.05.2018**
Numarası :

MAT104 LİNEER CEBİR II FİNAL SINAVI SORULARI

SORU 1: $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&5&6&7&4&1&2\end{pmatrix}$ ve $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\4&7&1&2&6&3&5\end{pmatrix}$ olmak üzere

σ,τ için

a) $\sigma\tau^2$ çarpımını hesaplayınız.

b) $\sigma\tau^2$ çarpımını transpozisyonların çarpımı olarak yazınız ve işaretini bulunuz.

SORU 2:

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\2&1&3\\1&0&0\end{bmatrix}$$

matrisi için

a) A nın eki (adjointi) $\widetilde{A}$ yı hesaplayınız.

b) A nın ekini kullanarak A^{-1} matrisini bulunuz.

SORU 3:

$$\begin{aligned}x+2y-z&=2\\2x-y+z&=1\\-x+y-2z&=1\end{aligned}$$

lineer denklem sistemini çözünüz.

SORU 4: V ve W aynı bir $\mathcal{F}$ cismi üzerinde tanımlanan iki vektör uzayı ve $A:V\to W$ bir lineer dönüşüm olsun. A lineer dönüşümü birebirdir $\Leftrightarrow$ $\forall\alpha\in V$ için $A(\alpha)=0\Rightarrow\alpha=0$ dır, gösteriniz.

SORU 5:

$$A=\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}$$

matrisinin karakteristik (öz) değerlerini ve karakteristik (öz) vektörlerini bulunuz.

Not: Sorular eşit puanlı ve süre 90 dakikadır.

Başarılar
Prof.Dr. İsmail AYDEMİR

1- a) $\sigma\tau^2 = \sigma\tau\tau$ olarak yazılacağından

$$\sigma\tau^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 1 & 2 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 1 & 2 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 7 & 2 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ dır.}$$

b) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 7 & 2 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\,5\,6\,3\,7)(2\,4)$$

$$= (1\,7)(1\,3)(1\,6)(1\,5)(2\,4)$$

seklinde transpozisyonlarının çarpımı seklinde yazılır. Bu transpozisyonların sayısı 5 olduğundan $\sigma\tau^2$ permütasyonunun işareti $s(\sigma\tau^2) = -1$ dir.

2- a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisinin eki $\tilde{A}$ olmak üzere

$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$

$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3$

$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3$

$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$ seklinde A nın kofaktörleri bulunur. Buradan

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ elde edilir.}$$

b) Bir A matrisinin A^{-1} tersi bulunurken

$$A^{-1} = \frac{\tilde{A}}{\det A}$$

eşitliğinden yararlanalım:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1\,(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 0.(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

3. satıra göre

$$+ 0.\,(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$= 3$ bulunur. O halde

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1/3 & 1/3 & -1/3 \end{bmatrix} \text{ elde edilir.}$$

3- Verilen lineer denklem sisteminde bilinmeyen sayısı $n=3$, denklem sayısı $m=3$ ve homojen olmayan bir sistemdir. Bu sistemin katsayılar matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$ olmak üzere

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1.(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}$$
$$+ (-1).(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 6 \neq 0 \text{ dır.}$$

Yukarıdaki verilere göre $m=n$ ve $\det A \neq 0$ olduğundan bu sistemin çözümü Cramer metoduyla bulunur:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{6} = \frac{6}{6} = 1,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{6} = \frac{0}{6} = 0,$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{6} = \frac{-6}{6} = -1 \text{ bulunur.}$$

4- ($\Rightarrow$) A birebir ve $A(\alpha)=0$ olsun. Göstereceğiz ki $\alpha=0$ dır. $A(0)=0$ olduğundan $A(\alpha)=0=A(0)$ yazılır. A birebir olduğundan $\alpha=0$ bulunur.

($\Leftarrow$) $A(\alpha)=0$ iken $\alpha=0$ olduğunu kabul edelim. Göstereceğiz ki A birebirdir. $\forall \alpha, \beta \in V$ için $A(\alpha)=A(\beta)$ olsun. Buradan $A(\alpha)-A(\beta)=0$ ve A lineer olduğundan $A(\alpha-\beta)=0$ olur. Bu ise hipoteze göre $\alpha-\beta=0$ olmasını gerektirir. Yani $\alpha=\beta$ dır. O halde A birebir bir dönüşümdür.

5- $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ matrisinin $\alpha=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix}\neq 0$

özvektörünü bulalım:

$$A(\alpha)=\lambda\alpha \quad , \quad \lambda\in\mathbb{R}$$

esitliginden

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\left(\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

veya

$$\begin{bmatrix}1-\lambda & 2\\ 2 & 1-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \quad (1-\lambda)\alpha_1+2\alpha_2=0$

$\qquad 2\alpha_1+(1-\lambda)\alpha_2=0$ lineer homojen denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin, sıfırdan farklı çözümlerini araştırdığımız için katsayılar matrisinin determinantı sıfır olmalıdır. Yani;

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0 \Rightarrow (1-\lambda)^2-4=0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)^2=4$$

$\Rightarrow \lambda_1=-1, \quad \lambda_2=3$ özdeğerleri bulunur.

Şimdi bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörleri bulalım:

$\lambda_1 = -1$ için

$$2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0$$
$$2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = 0$$

$\Rightarrow \alpha_1 = -\alpha_2$ olup $\alpha_1 = t \in \mathbb{R}$ dersek $\alpha_2 = -t$ olur. O halde

$$\alpha = \begin{bmatrix} t \\ -t \end{bmatrix}, \quad t \neq 0$$ özvektörü elde edilir.

$\lambda_2 = 3$ için

$$-2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0$$
$$2\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 - \alpha_2 = 0$$

$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2$ olup $\alpha_1 = t \in \mathbb{R}$ dersek $\alpha_2 = t$ olur. O halde

$$\alpha = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix}, \quad t \neq 0$$ özvektörü elde edilir.